12　フーリエ級数と偏微分方程式

フーリエ級数を用いて、熱伝導方程式や波動方程式といった２階の偏微分方程式を解くことができます。

12.1　１次元同次方程式

(例１)　波動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq l) \\ u(0,t) = 0\ ,\ u(l,t) = 0 \quad \text{(境界条件)} \\ u(x,0) = f(x)\ ,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = g(x) \quad \text{(初期条件)} \end{cases} \qquad \text{を解きます。}$$

長さ l の弦の振動を記述する方程式です。これを変数分離法といわれる方法で解くことにします。

解を、$u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ と仮定します。これを与式に代入すると、

$$\begin{aligned} F\ddot{G} &= c^2 F'' G \\ \frac{\ddot{G}}{c^2 G} &= \frac{F''}{F} \end{aligned}$$

$\dot{}$ は時間 t による微分、$'$ は位置 x による微分です。

左辺は t の関数、右辺は x の関数なので、イコールが成立するには定数でなければなりません。

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

$$\begin{cases} F'' - kF = 0 \\ \ddot{G} - kc^2 G = 0 \end{cases} \tag{12.1}$$

(12.1) の第１式の解を求めます。

$k = 0$ のとき、$F = ax + b$ ですが、境界条件より $F(0) = F(l) = 0$ なので $a = b = 0$、よって $F(x) = 0$ となり不適です。($u(x,t) = 0$ は物理的に意味のない解です)

$k > 0$ のとき、$k = \lambda^2$ とおくと $F = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$ となりますが、同様に境界条件より $c_1 = c_2 = 0$ となり不適です。

$k < 0$ のとき、$k = -\lambda^2$ とおくと、(8.6) より $F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ となります。境界条件より

$$F(0) = A = 0\ ,\ F(l) = B\sin\lambda l = 0 \tag{12.2}$$

$B = 0$ ならば $F(x) = 0$ となるので $B \neq 0$ です。したがって $\sin\lambda l = 0$ より、$\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$　(n : 整数)

よって、

$$F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n : \text{整数}) \tag{12.3}$$

(12.1) の第２式の解は、$k = -\lambda^2 = -\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$ より、

$$G_n(t) = C_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n \sin\frac{n\pi c}{l}t \tag{12.4}$$

よって、

$$u_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right) \tag{12.5}$$

常微分方程式と同様に、解の１次結合も解となる (8.2) ので、未知の定数を置きかえて

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C'_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + D'_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right) \tag{12.6}$$

$n=0$ のときは $u=0$ となるので省くことができます。また n が負の場合は、$B_nC_n - B_{-n}C_{-n} = C'_n$ と置くことで省きました。

初期条件より

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x) \qquad (0 \leq x \leq l) \tag{12.7}$$

$f(x)$ は $0 \leq x \leq l$ で定義された関数でですが、周期 l の奇関数になるように拡張します。$f(x)$ をフーリエ級数展開すると、(11.5) より

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \ ,\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \tag{12.8}$$

(12.7) と (12.8) を比べて、$C'_n = b_n$ がわかりました。

(12.6) を t で微分して初期条件を用いると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} D'_n \frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = g(x) \tag{12.9}$$

同様に $D'_n\dfrac{n\pi c}{l}$ はフーリエ係数になっているので、$D'_n\dfrac{n\pi c}{l} = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$ です。

以上より求める解は、

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C'_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + D'_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right) \\ C'_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\ D'_n = \dfrac{2}{n\pi c}\displaystyle\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \end{cases}$$

(例２)　熱伝導方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq l) \\ u(0,t) = 0 \ ,\ u(l,t) = 0 \quad (\text{境界条件}) \\ u(x,0) = f(x) \quad (\text{初期条件}) \end{cases} \quad \text{を解きます。}$$

１次元の棒の、位置 x、時間 t における温度を記述する方程式です。

$u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$ とおいて代入すると、$\dfrac{\dot{G}}{c^2G} = \dfrac{F''}{F}$、例１と同様にして、両辺が負の定数であることがすぐにわかります。その定数を $-\lambda^2$ とおくと、

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ \dot{G} + \lambda^2 c^2 G = 0 \end{cases} \tag{12.10}$$

(12.10) の第１式の解は $F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

境界条件より $F(0) = A = 0$、$F(l) = B\sin\lambda l = 0$ となり、$B \neq 0$ より $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$ 　(n : 整数)

第２式の解は (7.4) より $G(t) = Ce^{-c^2\lambda_n^2 t}$

よって、$u_n(x,t) = B_n\sin\lambda_n x\cdot C_n e^{-c^2\lambda_n^2 t} = D_n\sin\lambda_n x\cdot e^{-c^2\lambda_n^2 t}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\sin\lambda_n x\cdot e^{-c^2\lambda_n^2 t} \tag{12.11}$$

初期条件より $u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$ で、例１と同様に D_n は $f(x)$ の正弦フーリエ係数になっ

ています。以上より求める解は、

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\lambda_n x \cdot e^{-c^2\lambda_n^2 t} \\ D_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\lambda_n x dx \\ \lambda_n = \dfrac{n\pi}{l} \end{cases}$$

(例３)　熱伝導方程式 (断熱境界条件)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le l) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \quad (\text{断熱境界条件}) \\ u(x,0) = f(x) \quad (\text{初期条件}) \end{cases} \quad \text{を解きます。}$$

両端で断熱されている棒の熱方程式です。

これまでと同様に $F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$、$G(t) = Ce^{-c^2\lambda^2 t}$ とできます。

境界条件より、$F'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0$、$F'(l) = -A\lambda\sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$

$u_n(x,t)$ の１次結合を作るのですが、これまでと違い $n = 0$ のとき $F(x) \neq 0$ であることに注意すると、

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\lambda_n x \cdot e^{-c^2\lambda_n^2 t} = A + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\lambda_n x \cdot e^{-c^2\lambda_n^2 t} \tag{12.12}$$

初期条件より、A と D_n はフーリエ余弦係数 (11.4) になっていることがわかります。

よって $A = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)dx$、$D_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}xdx$

(例４)　熱伝導方程式 (無限区間)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty \le x \le \infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad (\text{初期条件}) \end{cases} \quad \text{を解きます。}$$

無限に長い棒の熱方程式です。

これまでと同様に $F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$、$G(t) = Ce^{-c^2\lambda^2 t}$ とできます。

境界条件がないので λ は任意の値をとれます。無限区間の非周期関数についてフーリエ級数をフーリエ積分に拡張したので、この場合フーリエ積分を用いるのは自然なことです。

全ての実数 λ について解の１次結合を作ると、

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} (A'\cos\lambda x + B'\sin\lambda x)\, e^{-c^2\lambda^2 t} d\lambda \tag{12.13}$$

初期条件より

$$u(x,0) = \int_0^{\infty} (A'\cos\lambda x + B'\sin\lambda x)\, d\lambda = f(x) \tag{12.14}$$

これと (11.7) を比較して、$A' = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx$、$B' = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx$ となります。

12.2　２次元同次方程式

(例５)　２次元波動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (0 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le b) \\ u(0,y,t) = u(x,0,t) = u(a,y,t) = u(x,b,t) = 0 \quad (\text{境界条件}) \\ u(x,y,0) = f(x,y)\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x,y) \quad (\text{初期条件}) \end{cases} \quad \text{を解きます。}$$

辺の長さが a、b の長方形膜の振動を記述する方程式です。

$u(x,y,t)=F(x,y)\cdot G(t)$ とおいて代入すると $\dfrac{\ddot{G}}{c^2G}=\dfrac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy})=-\lambda^2$ とおけて、

$$\ddot{G}+\lambda^2G=0 \tag{12.15}$$

$$F_{xx}+F_{yy}+\lambda^2F=0 \tag{12.16}$$

$F(x,y)=H(x)\cdot I(y)$ とおいて (12.16) に代入、整理すると、$\dfrac{1}{H}\dfrac{d^2H}{dx^2}=-\dfrac{1}{I}\dfrac{d^2I}{dy^2}-\lambda^2=\lambda'^2$ とおけます。よって、

$$\frac{d^2H}{dx^2}+\lambda'^2H=0\ ,\ \frac{d^2I}{dy^2}+(\lambda^2-\lambda'^2)I=0 \tag{12.17}$$

$\lambda^2-\lambda'^2=k^2$ とおいて、(右辺が正でなければならないことはすぐに確かめられます)

$$H(x)=A\cos\lambda'x+B\sin\lambda'x\ ,\ I(y)=C\cos kx+D\sin kx \tag{12.18}$$

境界条件より、$H(0)=A=0$, $H(a)=B\sin a\lambda'=0$、よって $\lambda'=\dfrac{n\pi}{a}$ $(n:\text{整数})$

同様に境界条件より $C=0$, $k=\dfrac{m\pi}{b}$ $(m:\text{整数})$ なので、$F_{m,n}(x,y)=BD\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{m\pi y}{b}$

(12.15) より、$G_{m,n}(t)=P\cos\lambda t+Q\sin\lambda t$、ただし、

$$\lambda=\lambda_{m,n}=\sqrt{k^2+\lambda'^2}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}} \tag{12.19}$$

よって、$u_{m,n}(x,y,t)=(P'\cos\lambda t+Q'\sin\lambda t)\sin\dfrac{n\pi x}{a}\cdot\sin\dfrac{m\pi y}{b}$ なので、

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(P'\cos\lambda t+Q'\sin\lambda t)\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b} \tag{12.20}$$

初期条件より

$$u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P'\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}=f(x,y) \tag{12.21}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda Q'\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}=g(x,y) \tag{12.22}$$

$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}P'\sin\frac{m\pi y}{b}=J(y)$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}J(y)\sin\frac{n\pi x}{a}=f(x,y)$ より、

$$J(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \tag{12.23}$$

$$P'=\frac{2}{b}\int_0^b J(y)\sin\frac{m\pi y}{b}dy=\frac{4}{ab}\int_0^b\!\!\int_0^a f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}dxdy \tag{12.24}$$

同様に

$$Q'=\frac{4}{ab\lambda}\int_0^b\!\!\int_0^a g(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}dxdy \tag{12.25}$$

(12.19)、(12.20)、(12.24)、(12.25) が解となります。

12.3　非同次方程式

非同次熱伝導方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t) & (0\le x\le l)\\ u(0,t)=0\ ,\ u(l,t)=0 & (\text{境界条件})\\ u(x,0)=g(x) & (\text{初期条件})\end{cases}$$

を解きます。

(例６)　$f(x,t)$ が x のみの関数 $f(x)$ の場合を考えます。
$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ とおいて代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x) \tag{12.26}$$

$c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x)=0$ となるように $w(x)$ を決定します。
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{c^2}f(x)$ より、

$$w(x)=-\iint\frac{f(x)}{c^2}dxdx+Ax+B \tag{12.27}$$

また、$v(0,t)=v(l,t)=0$ とすると、境界条件より

$$u(0,t)=v(0,t)+w(0)=w(0)=0\ ,\ u(l,t)=v(l,t)+w(l)=w(l)=0 \tag{12.28}$$

(12.27)、(12.28) より $w(x)$ が決定します。
初期条件より $v(x,0)=u(x,0)+w(x)=g(x)-w(x)$
以上より、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (0\leq x\leq l) \\ v(0,t)=0\ ,\ v(l,t)=0 \quad (\text{境界条件}) \\ v(x,0)=g(x)-w(x) \quad (\text{初期条件}) \end{cases}$$

の同次形に帰着できました。

(例７)　$f(x,t)$ が一般の関数の場合を考えます。
これまでの経験から、

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t)\sin\lambda x\ \ (\lambda=\frac{n\pi}{l}) \tag{12.29}$$

と解を予想します。これは境界条件を満たしています。
また、$f(x,t)$ を x について奇関数に拡張して、$f(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P_n(t)\sin\lambda x$ とフーリエ級数展開します。
これらを与式に代入して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial t}+c^2\lambda^2 Q_n-P_n\right)\sin\lambda x=0$
$\sin\lambda x$ についての恒等式なので

$$\dot{Q}_n(t)+c^2\lambda^2 Q_n(t)-P_n(t)=0 \tag{12.30}$$

同様に、$g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\lambda x$ とフーリエ級数展開すると、
初期条件より $u(x,0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(0)\sin\lambda x=\sum_{n=1}^{\infty}a\sin\lambda x$ より、

$$Q_n(0)=a_n \tag{12.31}$$

(12.29)、(12.30) の常微分方程式を解くことで $Q_n(t)$ がわかります。
もし境界条件が例３のような断熱境界条件なら、$u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t)\cos\lambda x$ と予想して、$f(x,t)$ と $g(x)$ は偶関数に拡張してフーリエ余弦級数展開しましょう。

12.4　非同次条件の方程式

（例８）　非同次条件の同次方程式

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq l) \\ u(0,t) = \alpha(t)\ ,\ u(l,t) = \beta(t) \quad \text{(非同次境界条件)} \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{(初期条件)} \end{array}\right. \qquad \text{を解きます。}$$

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{l-x}{l}\alpha(t) - \frac{x}{l}\beta(t) \tag{12.32}$$

とおいて代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{l-x}{l}\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{x}{l}\frac{\partial \beta}{\partial t} \tag{12.33}$$

となります。さらに境界条件、初期条件は、

$$\left\{\begin{array}{l} v(0,t) = u(0,t) - \alpha(t) = 0 \\ v(l,t) = u(l,t) - \beta(t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - \dfrac{l-x}{l}\alpha(0) - \dfrac{x}{l}\beta(0) \end{array}\right.$$

となり、例７の形 (同次条件の非同次方程式) に帰着できました。